Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Propriedades do Processo de Poisson

Teorema 1

Seja $(X_t)_{t \geq 0}$ um processo crescente, contínuo à direita, tal que $X_0 = 0$. Seja $0 < \lambda < \infty$. São equivalentes:

a) (X_t) é um PP(λ) (i.e., $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i = 1, 2 \ldots$, indep's;

$$Y_n = n, \; n \geq 0).$$

b) (X_t) tem incrementos indep, e $\forall\ h > 0$, unif/e em t:

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \tag{1}$$

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h). \tag{2}$$

c) (X_t) tem incrementos indep e estacionários e $\forall\ t \geq 0$

$$X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t).$$

Dem. do Teorema 1

(a $\Rightarrow$ c) Já vimos

(c $\Rightarrow$ b) $X_{t+h} - X_t \sim \text{Poisson}(\lambda h)$, logo

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0) = e^{-\lambda h}, \text{ e (1) segue;}$$
$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h e^{-\lambda h}, \text{ e (2) segue.}$$

(c $\Rightarrow$ a) A condição em c) determina as distribuições finito dimensionais de (X_t), e daí a distribuição do processo, em particular a da cadeia de saltos e dos tempos de salto.
Como o PP(λ) satisfaz c), então todo processo satisfazendo c) deve satisfazer a).

Dem. do Teorema 1 (cont)

(b $\Rightarrow$ c) Para $x \in \mathbb{N}$, seja $p_x(t) = \mathbb{P}(X_t = x)$. Então

$$\begin{aligned} p_y(t+h) &= \textstyle\sum_{x=0}^{y} \mathbb{P}(X_{t+h} = y | X_t = x) p_x(t) \\ &= \textstyle\sum_{x=0}^{y} \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = y - x) p_x(t) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_y(t+h) - p_y(t) = -(&\overbrace{1 - \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0)}^{\lambda h + o(h)}) \, p_y(t) \\ &+ \underbrace{\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1)}_{\lambda h + o(h)} \, p_{y-1}(t) + o(h), \end{aligned}$$

e temos*

$$(*) \begin{cases} p_y'(t) = -\lambda p_y(t) + \lambda p_{y-1}(t), \;\; y \geq 1; \\ p_0'(t) = -\lambda p_0(t); \\ p_y(0) = \delta_{0y}. \end{cases}$$

---

*depois de fazer uma conta semelhante para $h < 0$

Solução de $(*)$ — $y \geq 1$

$$y = 0: \quad p_0'(t) = -\lambda p_0(t),\ p_0(0) = 1 \Rightarrow p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

$$y \geq 1: \quad p_y'(t) = -\lambda p_y(t) + \lambda p_{y-1}(t),\ p_y(0) = 0,$$

que equivale a $\quad \Big(\underbrace{e^{\lambda t} p_y(t)}_{\tilde{p}_y(t)}\Big)' = \lambda \underbrace{e^{\lambda t} p_{y-1}(t)}_{\tilde{p}_{y-1}(t)},$

i.e., $\quad \tilde{p}_y'(t) = \lambda \tilde{p}_{y-1}(t),\ \tilde{p}_0(t) \equiv 1.$

Fazendo $\hat{p}_y(t) = \tilde{p}_{y-1}(t/\lambda)$, temos que

$$\hat{p}_y'(t) = \hat{p}_{y-1}(t),\ \hat{p}_0(t) \equiv 1 \Rightarrow \hat{p}_0(t) = \tfrac{t^y}{y!}, \text{ e logo}$$

$$p_y(t) = \mathbb{P}(X_t = y) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^y}{y!},\ y \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2

Suponha que (X_t) e (Y_t) sejam PPs independentes com taxas λ e μ, resp. (no mesmo espaço de probabilidade). Então

$$(Z_t := X_t + Y_t) \sim \mathrm{PP}(\lambda + \mu).$$

Dem. 1) $\mathbb{P}(Z_{t+h} - Z_t = 0) = \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0)\,\mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 0)$

$$= e^{-\lambda h} e^{-\mu h} = e^{-(\lambda+\mu)h} = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h)$$

2) $\mathbb{P}(Z_{t+h} - Z_t = 1) = \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1)\,\mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 0)$

$$+\,\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0)\,\mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 1)$$

$$= [\lambda h + o(h)]\,[1 - \mu h + o(h)] + [1 - \lambda h + o(h)]\,[\mu h + o(h)]$$

$$= (\lambda + \mu)h + o(h)$$

Os incrementos de (Z_t) são somas dos incrementos de (X_t) e (Y_t); logo, são independentes. $\square$

Teorema 3

Suponha $(X_t) \sim \mathrm{PP}(\lambda)$. Fixados $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, e dado que $X_t = n$, então os tempos de salto

$$(S_1, \ldots, S_n) \sim (U_1^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)}), \text{ as } \textit{estatísticas de ordem}$$

das va's iid $(U_1, \ldots, U_n)$ com distribuição uniforme em $(0, t)$.

Dem. Temos de $T_1, T_2, \ldots$ iid $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ que

$$f_{T_1,\ldots,T_{n+1}}(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}} \, \mathbb{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_{n+1}<\infty\}}, \qquad (3)$$

onde $s_k = t_1 + \cdots t_k$, $k \geq 1$.

Segue que $f_{S_1,\ldots,S_{n+1}}(s_1, \ldots, s_{n+1})$ também é igual ao l.d. (3).

Dem. do Teorema 3 (cont)

Logo, dado um (hiper)retângulo **R** de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{P}((S_1, \ldots, S_n) \in \mathbf{R}, X_t = n) = \mathbb{P}((S_1, \ldots, S_n) \in \mathbf{R}, S_n < t < S_{n+1})$$

$$= \lambda^n \int_{(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbf{R}} ds_1 \cdots ds_n \Big(\int_t^\infty ds_{n+1} \lambda e^{-\lambda s_{n+1}} \Big) \mathbb{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n<t\}}$$

$$= \underbrace{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}_{\mathbb{P}(X_t=n)} \int_{(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbf{R}} \underbrace{n! \, \frac{1}{t^n} \, \mathbb{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n<t\}}}_{\text{função densidade de prob das estatísticas ordem de } (U_1, \ldots, U_n)} ds_1 \cdots ds_n$$

$\square$

Exemplo

Num sistema financeiro, um ativo vale R$ 1 no tempo 0, e o investidor que chegar ao sistema no tempo $s > 0$ paga um preço *descontado pela inflação* de R$ $e^{-\beta s}$, onde $\beta > 0$ é a taxa de inflação.
Suponha que a chegada de investidores ao sistema se dê segundo um processso de Poisson de taxa $\lambda > 0$.
Ache o valor esperado do total coletado no tempo $t > 0$ fixado.

Solução: Usando a notação do Teo 3, o total coletado até o tempo t vale $\tau_t := \sum_{i=1}^{X_t} e^{-\beta S_i}$, se $X_t > 0$, e $\tau_t = 0$, se $X_t = 0$; então

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tau_t) &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} e^{-\beta S_i} \Big| X_t = n \Big) \mathbb{P}(X_t = n) \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} e^{-\beta U_i^{(n)}} \Big) \mathbb{P}(X_t = n) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} e^{-\beta U_i} \Big) \mathbb{P}(X_t = n) \\
&= \sum_{n\geq 1} n\, \mathbb{E}(e^{-\beta U_1})\, \mathbb{P}(X_t = n) = \mathbb{E}(e^{-\beta U_1}) \sum_{n\geq 1} n\, \mathbb{P}(X_t = n) \\
&= \mathbb{E}(e^{-\beta U_1})\mathbb{E}(X_t) = \lambda t\, \frac{1}{t} \int_0^t e^{-\beta s} ds = \frac{\lambda}{\beta}(1 - e^{-\beta t}).
\end{aligned}$$

Teorema 4 (Partição de um processo de Poisson)

Seja (X_t) um processo de Poisson de taxa λ e $Y_1, Y_2, \ldots$ iid, $\mathbb{P}(Y_1 = j) = p_j$, $j \geq 1$, $\sum_{j\geq 1} p_j = 1$.

Vamos fazer $X_t^j = \sum_{r=1}^{X_t} 1\{Y_r = j\}$, $t \geq 0$, $j \geq 1$ (conv.: $\sum_{r=1}^{0} \cdots = 0$); X_t^j conta os eventos de X_t de *tipo* j.

Então, (X_t^j), $j \geq 1$, são PP's indep's de taxas λp_j, resp.

Dem. É suficiente tratar do caso $p_1 + p_2 = 1$.

Vamos calcular a distribuição conjunta dos incrementos dos dois processos e mostrar que ela fatora da maneira indicada no enunciado do teorema.

Para $k \geq 1$, sejam $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, e fixemos ℓ_i, $m_i \geq 0$, com $n_i = \ell_i + m_i$, $i = 1, \ldots, k$.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X^1_{t_1} = \ell_1, X^2_{t_1} = m_1;\ X^1_{t_2} - X^1_{t_1} = \ell_2, X^2_{t_2} - X^2_{t_1} = m_2;\ \ldots \\
&\qquad \ldots;\ X^1_{t_k} - X^1_{t_{k-1}} = \ell_k, X^2_{t_k} - X^2_{t_{k-1}} = m_k) \qquad (4) \\
&= \mathbb{P}(X_{t_1} = n_1, X_{t_2} - X_{t_1} = n_2, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k; \\
&\qquad\qquad Z^{n_1}_0 = \ell_1, Z^{n_2}_{N_1} = \ell_2, \ldots, Z^{n_k}_{N_{k-1}} = \ell_k),
\end{aligned}
$$

onde $N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$, $i \geq 1$, e $Z^n_m = \sum_{r=m+1}^{m+n} \mathbb{1}\{Y_r = 1\} \sim \text{Bin}(n, p_1)$.

Os eventos (separados por ",") na última probabilidade são independentes e $\mathbb{P}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = n_i) \times \mathbb{P}(Z^{n_i}_{N_{i-1}} = \ell_i) =$

$$
e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \frac{[\lambda(t_i - t_{i-1})]^{n_i}}{n_i!} \times \frac{n_i!}{\ell_i! m_i!} p_1^{\ell_i} p_2^{m_i}
$$

$$
= e^{-\lambda p_1 (t_i - t_{i-1})} \frac{[\lambda p_1 (t_i - t_{i-1})]^{\ell_i}}{\ell_i!} \times e^{-\lambda p_2 (t_i - t_{i-1})} \frac{[\lambda p_2 (t_i - t_{i-1})]^{m_i}}{m_i!}.
$$

Logo, a probabilidade em (4) vale

$$\prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda p_1(t_i - t_{i-1})} \frac{[\lambda p_1(t_i - t_{i-1})]^{\ell_i}}{\ell_i!} \times \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda p_2(t_i - t_{i-1})} \frac{[\lambda p_2(t_i - t_{i-1})]^{m_i}}{m_i!}$$

$$\stackrel{(5)}{=} P(\tilde{X}_{t_1}^1 = \ell_1, \ldots, \tilde{X}_{t_k}^1 - \tilde{X}_{t_{k-1}}^1 = \ell_k) \times P(\tilde{X}_{t_1}^2 = m_1, \ldots, \tilde{X}_{t_k}^2 - \tilde{X}_{t_{k-1}}^2 = m_k),$$

onde $(\tilde{X}_t^j)$ é um PP(λp_j), $j = 1, 2$.

Como a probabilidade em (4) também vale

$$\mathbb{P}(\{X_{t_1}^1 = \ell_1, \ldots, X_{t_k}^1 - X_{t_{k-1}}^1 = \ell_k\}, \{X_{t_1}^2 = m_1, \ldots, X_{t_k}^2 - X_{t_{k-1}}^2 = m_k\}),$$

temos que, para cada $j = 1, 2$, (X_t^j) é (marginalmente) um PP(λp_j), e a fatoração no lado direito de (5) mostra que (X_t^1) e (X_t^2) são independentes. $\square$

Aplicação: coleção de figurinhas com probs $\neq$s

No problema do colecionador de figurinhas[†], suponha que em cada aquisição, independente das demais aquisições, a probabilidade de o colecionador adquirir a figurinha j seja $p_j > 0$, $p_1 + \cdots + p_M = 1$; p_j's não necessariamente iguais.

Mesma pergunta: qual é o número esperado de aquisições até o álbum ser preenchido?

Vamos supor que o colecionador faz suas aquisições nos tempos de salto de um PP (X_t) de taxa 1. Para cada $j = 1, \ldots, M$, vamos atribuir aos tempos de salto do PP a marca j se a figurinha adquirida naquele tempo for a j, e seja (X_t^j) o processo de contagem dos tempos de salto associados à aquisição da fig j, como no Teo 4. Então, pelo Teo 4, (X_t^j), $j = 1, \ldots, M$, são PPs indep, com taxas p_j, $j = 1, \ldots, M$, resp.

[†] Vide final da Aula 2.

Álbum de figurinhas (cont.)

Seja V_j o tempo em (X_t^j) até o primeiro salto, e façamos $V = \max_{1\leq j\leq M} V_j$. Então, os V_j's são v.a.'s independentes e

$$\mathbb{E}(V) = \int_0^\infty \mathbb{P}(V > t)dt = \int_0^\infty (1 - \mathbb{P}(\max_{1\leq j\leq M} V_j \leq t))dt$$

$$= \int_0^\infty (1 - \prod_{1\leq j\leq M} \mathbb{P}(V_j \leq t))dt = \int_0^\infty (1 - \prod_{1\leq j\leq M} (1 - e^{-p_j t}))dt$$

Note agora que $V = \sum_{i=1}^N T_i$, onde $T_1, T_2, \dots$ são os tempos entre saltos de (X_t) (iid Exp(1)), e N é o número de aquisições de figurinhas até o álbum ser preenchido.

Como N e (X_t) são indep: $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(N)$, e logo

$$\mathbb{E}(N) = \int_0^\infty (1 - \prod_{1\leq j\leq M} (1 - e^{-p_j t}))dt = \sum_{\emptyset\neq A\subset\{1,\dots,M\}} \frac{(-1)^{|A|-1}}{\sum_{j\in A} p_j}, \qquad (6)$$

onde $|A|$ é a cardinalidade de A.

Obs. Se tomarmos $p_1 = \cdots = p_M = \frac{1}{M}$, podemos recuperar, após algumas manipulações da integral ou da soma em (6), o resultado obtido no final do Álbum 2.